

Q.E.D.

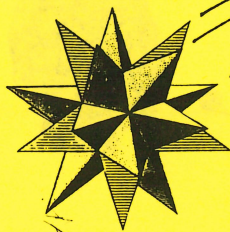
Nummer 13

19. maj 1993



Eksempel på gruppe med stor hår-længde.

Idag : Portræt af Henning Haahr.



EULERS VENNER

Foreningen af Matematikere - Aarhus Universitet

Matematisk Institut - Aarhus Universitet

8000 Aarhus C

Giro: 5 87 58 97

Q.E.D. er det officielle organ for Eulers Venner, Foreningen af Matematikere ved Aarhus Universitet. Eulers Venner har til formål at udbrede kendskabet til matematik og matematiske emner, og at knytte faglige og sociale kontakter mellem matematikere.

Q.E.D. er et blad fra, til, om og med matematikere. Q.E.D. blev navngivet enstemmigt & spontant af den samlede redaktion 19/3 1991 i 11. time. Q.E.D. er ikke, som man kunne tro, en forkortelse for det latinske *Quod Erat Demonstrandum*, men derimod navnet på et opvaskemiddel. Q.E.D. udkom første gang 21/3 1991, og har ikke siden været til at standse, trods ihærdige forsøg. Q.E.D. udkommer planmæssigt 6 gange årligt, og distribueres til alle medlemmer via de officielle kanaler. Produktforbedring har gjort Q.E.D. mere økonomisk i brug.

Indlæg, forslag og kommentarer af (næsten) enhver art modtages med kyshånd af redaktionen.

Q.E.D.

Redaktion:

Morten Storm (box 2)

Henrik Just (kontor A.3.16)

Adresse:

Redaktionen kan kontaktes på de nævnte læsepladser, og iøvrigt via Eulers Venner – se adressen under logoet.

Medlemsskab af Eulers Venner:

Henvendelse til foreningens kasserer, Jacob S. Møller (kontor A.3.16)

Trykkested:

Matematisk Instituts trykkeri

Oplag:

120

Deadline for Q.E.D. nummer 14:

Mandag den 13. September 1993

Qedaktion søges!

Kunne *du* ikke tænke dig at være med til at sikre at Q.E.D. fortsat vil være det fremragende blad, det er nu? Så gå ind i qedaktionen! Mange fordele:

- Gode advancementsmuligheder (bliv chefqedaktør)
- Mulighed for at herse med sine medmennesker (“skriv et indlæg om ...”)
- Få din mening ud, og undertryk andres (det er *dig*, der bestemmer, hvad der skal i bladet)

Ansøgninger stiles i 8 eksemplarer til bestyrelsen¹. Ingen adgangsbegrænsning!

Q.E.D.

P.S. Oplæring i qedaktionskunsten gives.

P.P.S. Hvis det ikke lykkes at få stablet en ny qedaktion på benene vil de kommende numre af Q.E.D. være nødudgaver redigeret på baggrund af tilfældigt indkommet materiale. (Nu var det vel ikke en skræmmekampagne?)

P.P.P.S. Q.E.D. ønsker god sommer!

† Dødsannonce †

Vores kære

studietur til Berlin

sov stille ind den 11.maj. I dens korte levetid nåede den kun at få 13 tilmeldinger. Alle der ikke var med til begravelsen, beder vi holde et minuts pause i læsningen til ære for dette mindeværdige initiativ.

Studietursudvalget

¹ eller man kan bare give et praj om at man gerne vil være med

Nyt fra bestyrelsen

Hvad med efterårsprogrammet?

Vi har allerede fået tilsagn om de to første Euler-foredrag til efteråret:

- *Ebbe Thue Poulsen* vil holde gult foredrag med titlen *røntgenscanning*.
- *Lisbeth Fajstrup* (der, for de som ikke ved det, er ansat som adjunkt på AUC) har lovet at holde et foredrag i serien “matematikere i arbejde” om sit liv som adjunkt.

Studieturen kniber det åbenbart mere med – se andetsteds i bladet (kan det virkelig passe, at nutidens unge ikke er interesserede i den slags???). Forslag til Euler-arrangementer er som altid mere end velkomne.

Eulerkruset – nu er det slut

Det definitivt sidste eksemplar af Eulerkruset er netop blevet brugt som gave til vores seneste foredragsholder *Gregory Nowak*. Der arbejdes imidlertid på at få fremstillet et nyt oplag – måske i et nyt design, hvem ved.

Euler-kalenderen

Fredag d. 25. juni. (sandsynligvis) Kandidatfest.

Kandidatfesten afholdes selvfølgelig i overensstemmelse med traditionerne. Detaljerne vil fremgå af opslag (“gamle” studerende kan ringe til den *varme linje* 86 202711–5336). Måske nogen har lyst til at stå for et sportsarrangement om eftermiddagen i lighed med sidste år?

Mandag d. 13. september. Deadline for Q.E.D. nummer 14.

Q.E.D. søger en ny redaktion – henvendelse til et bestyrelsesmedlem eller den nuværende redaktion.

Fredag den 17. september. Gravøl.

Som bekendt er det Eulers 210 års dødsdag den 18. september. Denne ganske særlige dag (bemærk primtalsfaktoreringen!) vil naturligvis blive højtideligholdt med gravøl i fredagsbaren.

Hver fredag. Matematisk fredagsbar, 16.00–18.00 i “Staff lounge”.

Fredagsbaren vil være åben til og med fredag den 18. juni, og vender tilbage igen fredag den 10. september. Fredagsbaren kan *også* bruge nye kræfter!

Hedebølge.

Det er forår på Matematisk Institut. Sydlandsk lune vinde bringer minder om græske Interrail-aftener på cafe'er og strande. Grandvoksne studerende promenerer korte bukser og stikkelsbærben, og i solen nedsvælges der ivrigt hygge-øl, så den ene anledning, så den anden anledning, så er Carlsberg lige kommet med en Tivoli øl. Som en kæmpe studiearkitektlampe bader solen parken.

De mere kvindelige fakulteter sender strømme af søde distractioner i lette kjoler forbi eksamensøjnene i Matematisk bibliotek. Muligvis en bevidst taktik fra disse fakulteters side. Den bedste årstid for studier af håndgribelige endeligt frembragte legemer, med gode egenskaber og oplivende parametre, er over os. Egetræerne i parken springer ud.

Mange mennesker fylder Matematisk Institut. Nogle er ja'ere og nogen er nej'ere, og det er ikke til at se det på hverken hår eller skæglængde.

Fredag 30/4 kommer cirkus til MI. Asger Aamund og Ebbe Kløvedal Reich forklarer med mange ord, hvorfor den ene siger ja, og den anden nej. De ikke-eksakte videnskabers superstar, politikken, tager en kort stund opmærksomheden fra Fourierkoefficienterne på tavlen i aud E. Præcision og stringent argumentation er afløst af EF cirkus'et, der med TV-station og guldløkket studieværtinde, lader kombattanterne udgyde en oral strøm af tælleligt mange dimensioner, to frembringere, mystiske afhængigheder og talrige modstride uden konklusioner.

I lange foredrag af betydelig kompleksitet, siger den ene ja og den anden nej.

Enkelte punkter er der enighed om, –pressen har været eksempelløs ringe!

I Tv's bedste sendetid, ser man Moses Hansen flintre rundt og begrave gode ønsker for det Danske folk, i de vestjydske klitter, imens han viderebringer den klokkeklare besked han har fået fra Gud. "Din tale skal være ja, ja – nej, nej!" står der i Bibelen, og i 1972 sagde vi ja, i 1986 sagde vi ja, i 1992 sagde vi nej, så i 1993 skal vi også sige nej!

Solen skinner stadig og det er fredag eftermiddag.

Hedebølgen er en uge henne.

*You are the fairest
of your sex,
let me be your
hero;
I love you as
one over x ,
As x approaches
zero.
Positively.*

Portræt af en lærer VI

Henning Haahr Andersen

Jeg er født først i sidste halvdel af dette århundrede. Min tip-i-syvende-oldefars sønnesøn hed Søren Kirkegaard. Det kan også nævnes at en lettere degenereret gren af Haahr-slægten bærer navnet Haarder (det turde jeg ikke have nævnt for et halvt år siden).

Min lykkelige barndom tilbragte jeg langt ude vestpå – nærmere betegnet på en gård på Slumstrup Mark. Faktisk er det så langt ude, at da jeg begyndte min skolegang (dog ikke i den stråtekte), bestod denne om sommeren kun af 2x2 timer om ugen.

I gymnasiet (VGT) fik jeg en humoristisk matematiklærer, en jovial fysiklærer og en energisk kemilærer, mens alle de andre lærere var enten kedelige eller irriterende. Om dette var årsag eller virkning ved jeg ikke, men i hvert fald stod det klart for mig, at jeg helst ville beskæftige mig med et eller andet naturvidenskabeligt, og jeg endte så op som håbefuld mat-fys student på Århus Universitet året efter studenteroprøret. Her blev jeg på det store førsteårskursus i matematik (som dengang bestod af 9 forelæsninger – de 3 om lørdagen – og 6 øvelser pr. uge!) undervist af den legendariske Svend Bundgaard og den altid velforberejede Ebbe Thue Poulsen. Fra dette første år husker jeg, at jeg ved vintereksamen var inde at høre 3 eksaminander. De blev alle bedt om at definere en gruppe. Det kunne de ikke, og så dumpede de alle tre. Dette gjorde indtryk på mig, og jeg besluttede at jeg hellere måtte prøve at finde ud af, hvad en gruppe er for noget (og det har jeg så stort set været optaget af lige siden).

Min skæbne blev omtrent beseglet på andet år. Her mødte jeg nemlig nogle af de første fascinerende sætninger i algebra. Samtidig lykkedes det mig aldrig at finde ud af, hvornår man må bytte om på to integrationer, og da samtidigt laboratorieøvelserne i fysik ganske effektivt overbeviste mig om, at fysik ikke var sagen for mig, ja så måtte det jo blive til en 2. del i matematik med speciale i algebra.

Medvirkende til dette valg var også den meget aktive algebragruppe anført af Birger Iversen og de 2–3 langtidsgæster, som han med stor succes fik hentet til instituttet. Birger blev min specialevejleder. En dag lå der en besked fra ham på mit bord: “Jeg er rejst til Paris – kommer igen om et par måneder”. På det tidspunkt var jeg nået til kernen i det specialeprojekt, Birger havde givet mig, og da han ikke var at træffe, måtte jeg løse problemet selv (jeg har siden selv, med vekslende resultat, forsøgt samme taktik overfor mine specialestudenter).

Efter overstået eksamen blev jeg adjunktvikar et år. Én af algebragæsterne det år var en franskmænd ved navn Demazure. Han og Birger fik mig smittet af deres begejstring over et bestemt problem vedrørende algebraiske grupper, og da jeg året efter blev optaget som Ph.D.-student på MIT, arbejdede jeg videre med dette. Det lykkedes mig at løse det, og så skrev jeg det ned og gik ind til én af lærerne og spurgte om han ville være vejleder på det. Sådan gik det til (lettere forkortet) at jeg fik min Ph.D.

Men hvad så? Der var ikke umiddelbart nogen stilling at få i Danmark, så jeg blev hængende i USA et par år endnu. Først et år på MIT og derefter et år på Institute for Advanced Study i Princeton. Her var der en lille gruppe, som også beskæftigede

sig med algebraiske grupper (anført af stormesteren A. Borel). Det blev et fantastisk spændende og inspirerende år.

Nu har jeg så i 14 år været her på stedet – dog afbrudt af et par orlovsperioder og flere andre udlandsophold.

Fra den private front kan nævnes, at jeg (på 21. år!) er gift med Gitte. Vi har to børn (på 16 og 18), og den ældste truer med at ville lære matematik.

Af andre mærkværdigheder skal også med at min bil er på alder med mine Ph.D.-studenter. Jeg har “vejledt” den i 8 år og meget tyder på, at den snart er færdig!

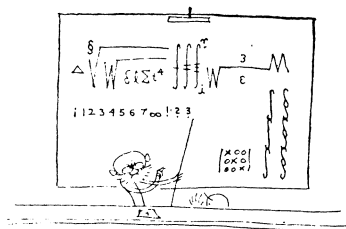
Øv, nu fik jeg slet ikke plads til at fortælle om kvantegrupper!

HHH.

I næste nummer:

Portræt af en lærer VII: Johan P. Hansen – den sande historie

(Så får vi se om Johan selv skriver den, eller redaktionen må gøre det...)



Vil du med rette
ha ny som lærd,
så tag det lette
og gør det svært.

Bogstøtte til Rusland

Sidste efterår fik Eulers Venner af Stakbogladsen overdraget en større mængde bøger til at forære til biblioteket på The University of Electrical Engineering, Department of Mathematics no. 2 i St. Petersburg til glæde for vore venner og kolleger der. Det var bøger, der var blevet efterladt i ingenmandsland under Stakbogladsens overtagelse af det gamle AB, og som dækkede en bred vifte af emner fra økonomi og datalogi over fysik til matematik. Vort eget bibliotek bidrog også til gaven.

Lang tid gik med (efter hovedfagseksamen) at finde en billig måde at få bøgerne fragtet til Rusland og med at finde en fornuftig finansiering. Et shipping-firma på havnen løb af med kontrakten — de gav os kort sagt et tilbud vi ikke kunne afvise — under en trediedel af normalprisen. Samtidig faldt finansieringen på plads. Og pludselig tirsdag før påske var lejligheden der: Vi skulle aflevere bøgerne på havnen morgenen efter! Efter at have ledt efter kasser, pakket og pakket om, kunne Thomas Kjellberg og undertegnede kl. 10 om aftenen præsentere to flyttekasser med bogstøtte til Rusland. Jeg vil i den forbindelse gerne rette en varm tak til Dowski og hans fortræffelige BMW, der transporterede bøgerne den første etape.

Torsdag den 4. april fik vi så omsider en fax fra institut-bestyreren/rektoren på The University of Electrical Engineering: Bøgerne var ankommet planmæssigt til St. Petersburg den 15. april, men var endnu ikke nået gennem tolden! Men vi må jo håbe på det bedste. I hvert fald vil jeg overbringe russernes tak til bidragsyderne!

Jakob Grove

Den Pedersen-Schultz formodning: *Verden er ondt.*

På EV-Rusland turen: *Med deres inflation bliver Russerne meget dygtig til infinitesimal regning.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\text{Ruble}) = \frac{\partial f}{\partial \text{Kopek}} = 0$$

Taaagekammerets Matematiske innovationer: *En morfi på en lukket og begrænset mængde kaldes en klaustromorfi.*

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{\TeX}$

Side 9 formlen.

Denne gang leverer Steffen side 9 formlen, i forlængelse af hans gule foredrag 12/5.

Riemann's eksakte formel (1859) for antallet af primtal $\leq x$:

$$J(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\text{Im} \rho > 0} [\text{Li}(x^\rho) + \text{Li}(x^{1-\rho})] + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} - \log 2.$$

Her er $J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(x^{1/n})$, hvor $\pi(x)$ er antallet af primtal $\leq x$, og

$$\text{Li}(e^{u+iv}) = \int_{-\infty}^{u+iv} \frac{e^s}{s} ds + z$$

hvor $z = \pi i$ hvis $v > 0$, $z = -\pi i$ hvis $v < 0$, $z = 0$ hvis $v = 0$. Summationen er over alle

nulpunkter med positiv imaginærdel for $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$



Sibirien igen igen.

Bæret over titlen udenrigskorrespondent, vil jeg fortsætte min beretning om mit ophold i Novosibirsk efterår/vinter 1992. Mens første afsnit handlede om organisering og dagligdagen, vil jeg i dette afsnit fortælle om "festivitas". Der overgik mig nemlig den ære, at jeg i løbet af mit ophold blev inviteret til bryllup 2 gange, hhv. i Letland og længere ude i Sibirien.

På vej til Novosibirsk havde jeg en uges afstikker til Riga i Letland, hvor en veninde bor. Da jeg skulle videre fortalte hun (og hendes bulgarske kæreste), at de forøvrigt skulle giftes i september, og at jeg var velkommen til at komme med. Og det korte af det lange er, at jeg kom med.

Turen dertil foregik i tog over Moskva, da jeg skulle have fornyet mit lettiske visum. (Det viste sig, at et sådant var gratis for folk fra Guds eget land, mens folk fra Danmark, der som det første land anerkendte Letlands uafhængighed, måtte lægge et mindre beløb i Guds egen valuta. Men sådan er der så meget.) Det tager 2 dage at køre med tog fra Novosibirsk til Moskva, og det kan godt blive lang tid, når man som jeg bliver køresyg af at læse i længere tid. Jeg rejste forøvrigt incognito som letter (accenten passede) af frygt for, at der ellers ville blive for stor interesse omkring min person, specielt min pengepung. Det skal dog nævnes, at det var interessant at se landskabet skifte.

På det tidspunkt kostede en billet i en 4-mandskupe i sovevogn ca. 10 kr., da jeg opnåede 50% studenterrabat på mit "årskort" (Ta' den DSB), og jeg var heldig med de øvrige passagerer, der alle var af hankøn. Den ene fodrede mig konstant, og de drak ikke i kupeen, kun når vi undervejs gjorde holdt. Opholdet på de forskellige stationer varierede i længde fra 3 til 15 min., men man kunne altid nå at købe forskelligt at spise og drikke, da der altid stod en sværm af ivrige sælgere, gerne matroner, parat. Jeg prøvede f.eks. hjemmesyltede agurker.

Turen Moskva-Riga var både kortere og mindre farverig. Det tog lidt over en nat, og jeg rejste "i trygge hænder" sammen med en anden gæst. Jeg husker dog, at vi holdt længe på grænsen, så passene rigtigt kunne granskes, og en lettisk grænsevagt talte svensk med mig.

Brylluppet foregik ca. 90 km nordøst for Riga i en lille flække hvor Aijas (sådan hedder hun) forældre bor på en gård. Traditionerne er selvfølgelig forskellige fra de danske. Bl.a. modtog forældrene brudeparret med brød og en skænk, da de kom fra "rådhuset", og de skulle endvidere udføre en praktisk opgave, inden de fik lov at komme ind (hhv. sy en lap i og hugge brænde).

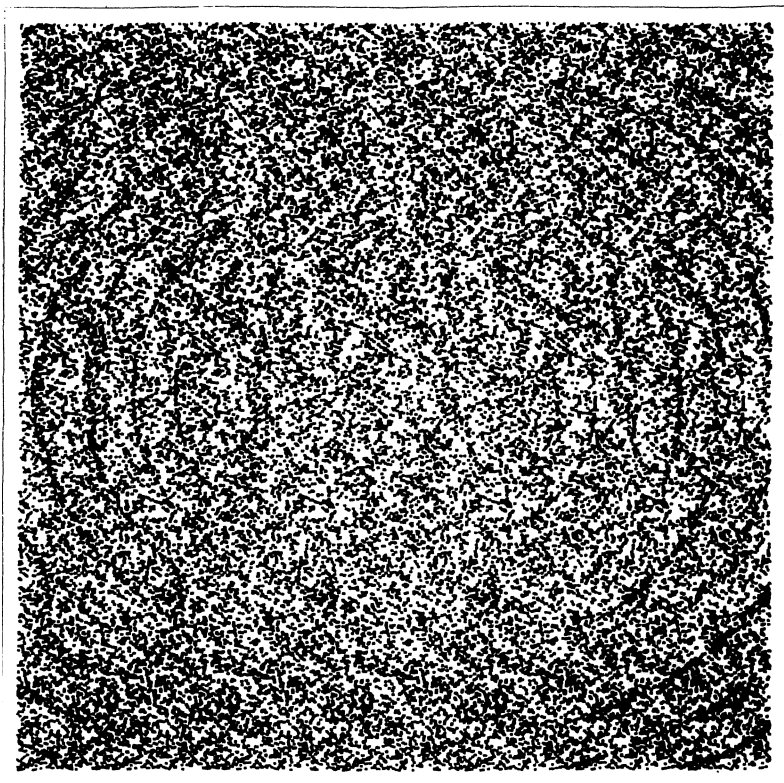
Spisningen foregik i en af husets stuer og ikke nær så stift, som når familien Danmark er ude at spise suppe, steg og is. Hvis folk fik lyst til at danse undervejs, gjorde de det i de tilstødende lokaler. På et tidspunkt blev alle taler og sange afviklet, og jeg hørte lige pludselig, at toastmasteren annoncerede min tale. Jeg havde ikke bedt om ordet, men nu var gode råd dyre. Heldigvis huskede jeg et citat af Tolstoj (ham med "Krig og Fred" bl.a.) ang. bryllup, og den gik klokkerent ind.

Fælles for både letter og russere er, at de med glæde køber tysk finsprit, som i Tyskland er mistænkt for at gøre folk blinde, og ikke nødvendigvis blander det op, før

de drikker det, og da slet ikke til en så festlig lejlighed som bryllup. Det blev hellere ikke mindre festligt af, at naboerne senere på aftenen kom forklædte som sigøjnere og dansede og gjorde ved.

Klokken tolv klædte brudeparret om, og så "kunne dagligdagen som ægtefolk begynde". Festen fortsatte ... Alle gæster overnattede rundt omkring, jeg selv på høloftet, og klokken 9 næste dag blev vi alle gennet op til morgenmad. Det var skægt / spændende at være med, og jeg kunne mæt og glad tage en flyver til Novosibirsk.

Tina Johanneson



En dyb spiralformet kegle. Yderligere en måde at se billedets tredje dimension på er ved at placere papiret ca. 40 cm fra øjnene og fokusere blikket på en genstand, som befinder sig præcist ved papirets kant, men fire til fem meter væk. Siden flyttes blikket hurtigt til billedets centrum. I nogle tilfælde kan det hjælpe at blinke et par gange.

Læseropgave

Der er minsandten indløbet et svar på Jacob Schachs læseropgave (senest bragt i Q.E.D. nummer 11) — svaret er indleveret af: Jacob selv, såmænd. Åbenbart *er* der ikke nogen af de mange ellers så fortrinlige tænkere her på stedet, der kan finde ud af den (bortset altså fra Jacob selv). Svaret bringes på de følgende sider. **Men** – vore læsere skal selvfølgelig have endnu en chance for at bevise, at de dur til noget, derfor bringer vi igen Niels K. Henriksens opgave (også bragt i nummer 11). For yderligere at animere til entusiasmen skal det da lige nævnes at Niels i sin følgeskrivelse inddrager den mulighed at opgaven *muligvis* er for *let*, og derfor *måske* retteligt burde bringes som børneopgave....

Opgave.

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben mængde, og lad $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ være en funktion. Antag, at der for $\bar{x}_0 \in U$ eksisterer en lineær afbildning $A_{\bar{x}_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $A_{\bar{x}_0} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$), som tilfredsstiller følgende betingelse:

$$\forall \bar{e} \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(\bar{x}_0 + t\bar{e}) - f(\bar{x}_0) - A_{\bar{x}_0}(t\bar{e})|}{|t|} = 0.$$

Kan vi på basis af dette slutte, at f er differentiabel i $\bar{x}_0$?

Besvarelser kan afleveres i Eulers røde postkasse i "Staff lounge". Der er selvfølgelig en flaske vin på højkant, sponsoreret af Matematisk Fredagsbar™.

Q.E.D.

Svar på QED's læser opgave

Opgave. Lad Σ_n betegne permutations gruppen for n elementer. Definer $\#\sigma$, som det mindste antal transpositioner af naboelementer der skal til for at generere σ . Find et udtryk for funktionen $\kappa_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ givet ved

$$\kappa_n(j) = \#\{\sigma \in \Sigma_n \mid \#\sigma = j\}$$

Besvarelse. Sæt $l_n = \max_{\sigma \in \Sigma_n} \{\#\sigma\} = \frac{1}{2}n(n-1)$. Da gælder følgende rekursive formel system der sammen med resultatet

$$\kappa_n(j) = \kappa_n(l_n - j)$$

bestemmer $\kappa_n(j)$ for alle n og j .

$$\kappa_n(0) = 1 \text{ for alle } n.$$

For $n > 1$ og $0 < j < n$ gælder

$$\kappa_{n-1}(j) = \kappa_n(j) - \kappa_n(j-1).$$

For $n > 1$ og $n \leq j \leq l_{n-1}$ gælder

$$\kappa_{n-1}(j) - \kappa_{n-1}(j-n) = \kappa_n(j) - \kappa_n(j-1)$$

For at bevise dette defineres først for $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$

$$\det_q(A) = \sum_{i=1}^n q^{i-1} a_{1i} \det_q(A_{1i}) \text{ og } \det_q(a) = a.$$

Lemma. For $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ gælder

$$\det_q(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} q^{\#\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Bevis. Ved induktion. Ok for $n = 1$.

$$\begin{aligned} \det_q(A) &= \sum_{i=1}^n q^{i-1} a_{1i} \sum_{\sigma \in \Sigma_{n-1}} q^{\#\sigma} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} q^{\#\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

QED

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TeX

Det ses let ved induktion at for $A, n \times n$ -matricen med 1 i alle indgange er

$$\det_q(A) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

Ved brug af lemmaet fås altså at

$$(1 - q) \sum_{j=1}^{l_n} \kappa_n(j) q^j = (1 - q^n) \sum_{j=1}^{l_{n-1}} \kappa_{n-1}(j) q^j.$$

Ved at sammenligne koefficienter fås følgende rekursive system.

$$\kappa_n(0) = \kappa_n(l_n) = 1 \text{ for alle } n.$$

For $n > 1$ og $0 < j < n$ gælder

$$\kappa_{n-1}(j) = \kappa_n(j) - \kappa_n(j-1).$$

For $n > 1$ og $n \leq j \leq l_{n-1}$ gælder

$$\kappa_{n-1}(j) - \kappa_{n-1}(j-n) = \kappa_n(j) - \kappa_n(j-1).$$

For $n > 1$ og $l_{n-1} < j \leq l_n$ gælder

$$\kappa_{n-1}(j-n) = \kappa_n(j-1) - \kappa_n(j).$$

Vi viser det intuitivt yderst rimelige resultat

Lemma.

$$\kappa_n(j) = \kappa_n(l_n - j).$$

Bevis. Vi laver induktion efter n og j . Ok for $n = 1$ og ok for alle $n, j = l_n$ eller $j = 0$. Antag ok for $n-1$ og for n op til og med $j-1$. Vi splitter i tre tilfælde.

For $0 < j < n$ får vi

$$\begin{aligned} \kappa_n(j) &= \kappa_{n-1}(j) + \kappa_n(j-1) \\ &= \kappa_{n-1}(l_{n-1} - j) + \kappa_n(l_n - j + 1) && \text{pr induktion} \\ &= \kappa_{n-1}(l_n - n + 1 - j) + \kappa_n(l_n - j + 1) && \text{da } l_n = l_{n-1} + n - 1 \\ &= \kappa_n(l_n - j). \end{aligned}$$

For $n \leq j \leq l_{n-1}$ får vi

$$\begin{aligned}
 \kappa_n(j) &= \kappa_{n-1}(j) - \kappa_{n-1}(j-n) + \kappa_n(j-1) \\
 &= \kappa_{n-1}(l_{n-1}-j) - \kappa_{n-1}(l_{n-1}-j+n) + \kappa_n(l_n-j+1) \\
 &= \kappa_{n-1}(l_n-n+1-j) - \kappa_{n-1}(l_n-j+1) + \kappa_n(l_n-j+1) \\
 &= \kappa_n(l_n-j).
 \end{aligned}$$

For $l_{n-1} < j < l_n$ fås

$$\begin{aligned}
 \kappa_n(j) &= \kappa_n(j-1) - \kappa_{n-1}(j-n) \\
 &= \kappa_n(l_n-j+1) - \kappa_{n-1}(l_{n-1}-j+n) \\
 &= \kappa_n(l_n-j+1) - \kappa_{n-1}(l_n-j+1) \\
 &= \kappa_n(l_n-j).
 \end{aligned}$$

QED

Vi kan nu konkludere bevarelsen.



"Well I'll bet Eggbeater must have missed that one."

Hvordan man følger en brugsanvisning

EDB – Umberto Eco forlyster sig med tekstbehandlingssystemer.

Men de medfølgende manualer kræver sin forfatter

ALLE ER SANDSYNLIGVIS på en eller anden cafe blevet udsat for en af de sukker-skåle, hvor låget, i samme øjeblik kunden forsøger at trække skeen til sig, sænker sig som bladet i en guillotine, hvorved det får skålen til at hvirvle op i luften og spreder dens indhold ud i den omgivende atmosfære. Alle har formodentlig tænkt, at den person, der har opfundet dette instrument, burde anbringes i en koncentrationslejr. I virkeligheden nyder han sikkert frugten af sine forbrydelser på en eller anden meget eksklusiv strand. Den amerikanske humorist Shelley Berman har engang skrevet, at den samme person sikkert snart vil opfinde en fuldstændig sikker bil, hvis døre kun kan åbnes indefra.

Jeg kørte i flere år rundt i en ellers på mange måder udmærket bil, hvor førerens askebæger imidlertid sad i venstre forløb. Alle ved, at man kører med venstre hånd på rattet, så man har højre hånd fri til at skifte gear og betjene de forskellige knapper og håndtag. Følgelig ryger man, hvis man altså ryger, mens man kører bil (og jeg indrømmer, at det er meget forkert), med cigaretten i højre hånd. Hvis man ryger med højre hånd og skal anbringe asken i et askebæger, der er placeret til venstre for ens venstre skulder, er man nødt til at gennemføre en meget

komliceret operation, hvorved man uvægerlig må tage blikket fra vejbanen. Hvis bilen, som det var tilfældet med den, jeg kørte, kan køre 180 kilometer i timen, er det at drysse aske i askebægeret - og dermed være uopmærksom i et par sekunder - ensbetydende med at begå sodomi med en containerlastbil. Den herre, der opfandt dette system har professionelt berøvet en mængde mennesker livet, ikke ved at påføre dem lungekræft, men ved at lade dem tørne sammen med diverse fremmedlegemer.

Armeret beton

JEG FORLYSTER mig med tekstbehandlingssystemer. Når man køber sådan et program, får man udleveret en pakke med disketter, en brugervejledning og en licens, som koster fra 800.000 lire til halvanden million. Man kan derefter henvende sig til firmaets instruktør eller give sig til at læse den medfølgende brugervejledning. Firmaets instruktør er som regel oplært af ham, der har opfundet den ovenfor omtalte sukkerskål, og man står sig bedst ved at skyde ham ned med en Magnum, i samme øjeblik han træder inden for døren. Det kommer til at koste en omkring tyve år - færre, hvis man har en god advokat - men i

den sidste ende sparer man tid.

Problemerne opstår for alvor, når man slår op i brugervejledningen. (De følgende betragtninger gælder en hvilken som helst brugervejledning til en hvilken som helst computerindretning). En brugervejledning til en computer fremtræder som en beholder af hård plastic med skarpe hjørner, som bør opbevares utilgængeligt for børn. Når man hiver vejledningerne ud af omslaget, viser de sig at være et antal genstande bestående af mange sider indbundet i armeret beton, de er umulige at transportere fra dagligstuen til arbejdsværelset, og de er forsynet med titler, der gør det helt uigennemskueligt, hvilken af dem man skal læse først. De knap så sadistiske fabrikanter leverer som regel kun to bind, mens de mest perverse leverer helt op til fire.

Idioter og ingeniører

TIL AT BEGYNDE med tror man, at den første forklarer det hele skridt for skridt for idioterne, at den anden er til brug for eksperterne, den tredje for de professionelle og så fremdeles. Forkert. De fortæller hver især noget, som de andre ikke fortæller, det, man har brug for at vide med det samme, står i vejledningen for ingeniører, og oplys-

ningerne til ingeniørerne står i den for idioter. Desuden har fabrikanten forudset, at kunden i løbet af de næste ti år vil få brug for at udvide brugervejledningerne, og de er derfor udformet som ringbind med cirka tre hundrede løseblade.

Enhver der har prøvet at arbejde med ringbind, ved, at, rent bortset fra besværet med at slå op i dem, bliver ringene skæve efter et par ganges brug, hvorefter ringbindet eksploderer og spreder sit indhold ud over hele lokalet. Mennesker, der søger oplysninger, er vant til at arbejde med noget, der hedder bøger, og som kan være forsynet med forskellige farver på forsnittet eller med indhak lige som en telefonbog, så man hurtigt kan finde det, man søger. Forfatterne til computervejledninger kender ikke denne yderst menneskelige vane, men fremstiller genstande med en holdbarhed på cirka otte timer. Den eneste fornuftige løsning er at splitte vejledningerne ad, studere dem i et halvt år med bistand fra en etruskolog, koge deres indhold ned til fire små sider (mere skal der ikke til) og smide dem væk.

På fredag udkommer Umberto Ecos nye essays i udvalg og oversættelse ved Thomas Harder (Forlaget Forum) under titlen 'Hvordan man rejser med en laks'. Herfra stammer teksten.



Umberto Eco fortolket af David Levine. Den lærde forfatter blev verdensberømt på den underfundige middelalderroman 'Rosen's Navn'.

Findes der et firefarveproblem?

● *Det siges, at ligegyldigt hvor indviklet et verdenskort man tegner, vil 4 farver være både nødvendige og tilstrækkelige til at sikre, at to lande med fælles grænsestrækning ikke får den samme farve. Er der nogen forklaring på dette teorem?* (5/2)

○ EN hvilken som helst fordeling af fire farver på cellerne i et topologisk hexagonalt netmønster vil *uundgåeligt* markere et mønster, der kunne være topologisk identisk med et eksisterende landkort.

Figur 1 viser et kort, der kunne beskrive et land, inddelt i provinser. I nærværende sammenhæng kaldes landet »Polygonien«. Det kunne være en nationalstat, omgivet af andre stater, et eller andet sted på jorden eller en anden planet.

Kortet er typisk. Hver provins har et antal naboprovinser. Antallet kan være lige eller ulige. Gen-nemsnit-santallet er 6. Tre provinser – aldrig flere – mødes i ét punkt, i denne sammenhæng kaldt et knudepunkt.

Et »perfekt kort« defineres

som et kort, der er farvet for perfekt adskillelse af provinserne, således at to naboprovinser aldrig har samme farve.

Det er en erfaringskendsgerning, at ethvert kort kan farves perfekt med fire farver.

Men hvad er beviset – det matematiske eller (topologiske bevis?

FIGUR 2 viser, hvordan Polygoniens provinser – som enhver eksisterende eller tænkt gruppe provinser – kan deles i topologisk hexagonale dele – celler – med naboceller i samme provins og/eller i naboprovinser.

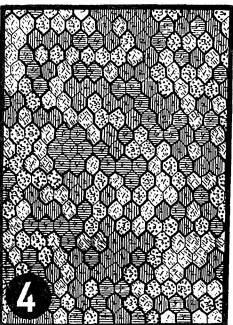
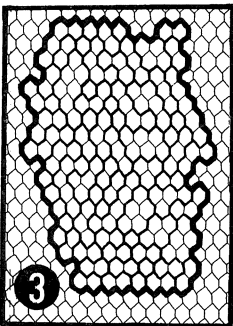
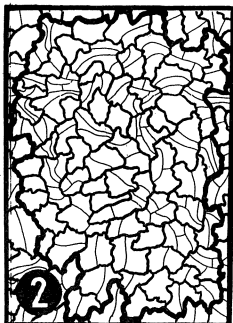
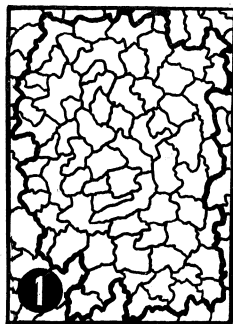
Det er en topologisk grundsætning, at et netværk af grænse-linjer kan manipuleres, vrides og forvansktes til uken-delighed, uden at den *topologiske* identitet går tabt. Lige grænse-linjer kan bugtes, bugtede kan rettes ud, små provinser kan pustes op, store krympes; alle længde- og flademål kan ændres – *når blot hver provins beholder de samme naboprovinser*. Således er figur 2 topologisk identisk med figur 3, hvor Polygoniens provinser og celler er overført til noget, der kunne ligne et bicellemønster. Det væsentlige er, at hver celle i figur 3 svarer til en celle i figur 2. Og når man ser bort fra de tynde streger i figur 3, svarer på samme måde hver provins til en provins i figur 1, med samme antal naboprovinser. Topologisk identitet betyder altså (i denne sammenhæng), at man bevarer de samme naboer under alle omskiftelser. Hvis de »kantede« provinser i figur 3 (tyk streg) er perfekt farvet – så to naboprovinser aldrig har samme farve – så kan de tilsvarende »bugtede« provinser i figur 1 farves på samme måde.

NÅR man farver cellerne i et hexagonalt netmønster – for eksempel en bivokstavle – med fire forskellige farver, 1, 2, 3 og 4, opstår der farvegrupper, der begrænser og adskiller hinanden. Dette er fuldkommen indlysende og kræver intet matematisk eller logisk bevis. Se figur 4, hvor farverne er fordelt efter tilfældighedens princip, og grænserne mellem farvegrupperne er trukket op med tyk streg.

Et vilkårligt valgt udsnit af dette mønster kan betragtes som en topologisk genpart (eller kopi) af et perfekt kort, der kunne beskrive en gruppe eksisterende provinser (eller stater, eller kantonen, eller departementer, eller sogne, eller andre administrative enheder).

Bemærk, at nogle provinser har et lige og andre ulige antal knudepunkter på deres grænse-linjer. Det samme gælder antallet af naboprovinser.

Bruger man tre farver i stedet for fire, opstår der et mønster, der umiddelbart viser en vis lighed med mønstret på figur 4. Men ved nøjere undersøgelse viser det sig, at alle provinser har et lige antal naboer (i sjældne tilfælde dog 1 nabo, jfr. Vatikanstaten og San Marino; men disse undtagelser er uvæsentlige for bevisførelsen). Sådanne kort er urealistiske; i »virkelighede-



dens verden» har hvert andet administrativt område et ulige antal naboområder.

Enhver kan gøre forsøget. Det er meget let. Man tager 3-400 runde spillemærker i fire forskellige farver – lige mange af hver – blander dem grundigt og spreder dem ud på bordet, så de ligger tæt sammen – så hvert spillemærke rører ved 6 andre. De vil danne farvegrupper – automatisk og uundgåeligt – og hver gruppe har et lige eller et ulige antal nabogrupper.

Og prøv så med tre farver! Det er 1 for lidt. Alle farvegrupperne får et lige antal nabogrupper.

KONKLUSION: Fire farver er *altid* nok til at lave et perfekt kort.

Når provinserne i »bicelleversionen« af Polygonien (figur 3) – og dermed provinserne i det »rigtige« kort, figur 1 – skal farves »perfekt« – så der ikke findes to naboprovinser med samme farve – så kan det ske på to helt forskellige måder:

(A) Den »manuelle« måde, hvor man farvelægger provinserne fra en ende af, så godt man kan. Man vil med stor sandsynlighed begå fejl, men dem retter man hen ad vejen. Hvis man skal farvelægge en provins, der allerede har naboprovinser i alle fire farver, viser det sig nemlig, at man *altid* kan lave om på de farver, man tidligere har lagt, så kabalnen kommer til at gå op. Det er »the trial-and-error way« – en hurtig og praktisk metode.

(B) Ved fordeling af de fire farver på cellerne efter den rene tilfældigheds princip – for eksempel ved hjælp af en tilfældighedsgenerator; eller idet man blander kulørte jetons, som før beskrevet, og lægger dem ud, så de fylder fla-

den inden for Polygoniens ydergrænser.

AT man på denne måde straks skulle »ramme« Polygoniens provinsgrænser, er selvfølgelig højest usandsynligt. Men det vil uundgåeligt ske, hvis man gentager processen *ad infinitum*; for antallet af celler i Polygonien er endeligt, og derfor er antallet af farvefordelingsmuligheder også endeligt (om end stort).

Dette er det afgørende og uimodsigelige bevis for firfarveteteoriet's gyldighed (uanset antallet af provinser).

Og det er et *enkelt* bevis, i modsætning til Haken og Appels omstridte bevis fra 1976, som var baseret på en serie uhyre indviklede computerberegninger. (Hasselbalch, Mallorca)

*It's not nonsense,
but it is pointless.*



FANDENS FORETAGENDE

Mytisk Gruk.

Jeg drømte saa pudsigt om Fanden forleden,
at han vilde sluge Uendeligheden.
Da han kom til tre Hundrede Tusind og tolv,
saa synts han, det hele gik Fanden i Vold.
Da han naade halvtreds Millioner og nitten,
saa mente han nok, han var nærmere ved den.
Da han kom til syv Tusind og tre Milliarder,
saa vilde han Faen ta ham ønske, han var der.

Seminar for Dem-Med-Hår- På-Brystet om Knude Teori

Som enhver tilfældig forbipasserende kvantefysiker kan fortælle dig, spiller Yang-Baxter Ligningen (YBE) en uhyre stor rolle i statistisk mekanik. Ligeledes kan enhver tilfældig forbipasserende knudeM/K fortælle dig at fletningsgruppen B_n spiller en ligeså stor rolle indenfor knudeteori. Det sjove er nu, at en familie af matricer $\{(\rho_{ij})\}_n$ danner en repræsentation for B_n hvis matricerne udgør en løsning til YBE. Som kendt giver en representation for B_n anledning til en (polynoms) invariant for lænker. I de senere år har forskere fundet frem til en følge, somme siger en plage, af gruppe-algebraer hvori B_n ligger. Disse algebraer giver allesammen anledning til mange nye familier af invarianter. Denne orden ser ud til at være del af en endnu højere orden hvori bl.a. topological field theory dukker op. Hele forskningen er en samspil af matematikere og fysikere, hvori YBE og representationerne for B_n hovedrollerne spiller.

Det ovenstående er så billedet man kan få idag, hvis man fordyber sig lidt i knudeteoriens forskning. I min seminar vil jeg fortælle lidt om baggrunden til de udviklinger indenfor dette område. I første timen behandler jeg historien op til de knude invarianter som er kommet frem i det sidste årti. I anden time vil jeg snakke om elementært fletningsgruppe teori, og sige noget om utrolig smukt og verdensberømt matematik, som efter sigende stammer fra vores Matematisk Institut. Til sidst vil jeg vise hvordan man tryller en knude invariant ud af en representation for B_n .

Pieter van de Griend.

**Auditorium D1. Fredag
21 Maj kl.14–16.**

**NB. Matematisk Fredagsbar har åbent
efter foredraget!!**

(Vi kan naturligvis ikke *garantere*, at Pieter giver en omgang)