

# Transcendens

## Ikke kun for buddhister

Simon Kristensen

Institut for Matematik  
Aarhus Universitet

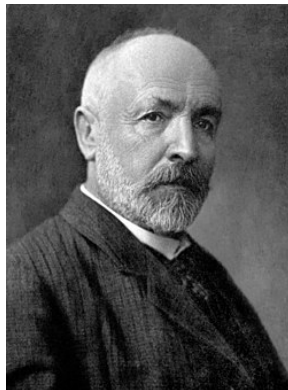
16. februar 2026

# Outline

- 1 De første eksempler
- 2 I Liouvilles fodspor
- 3 Kan det egentlig bruges til noget?
- 4 Konkrete tal

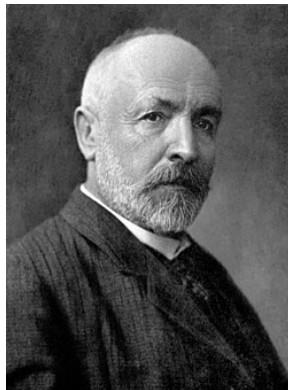
# En ikke kronologisk historie

- Fra Analyse 1 ved vi, at der er tælleligt mange rationale tal, men overtælleligt mange reelle tal.



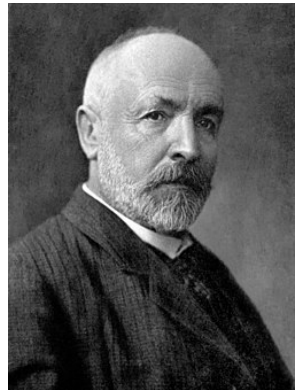
# En ikke kronologisk historie

- Fra Analyse 1 ved vi, at der er tælleligt mange rationale tal, men overtælleligt mange reelle tal.
- Et eksempel på et irrationalt tal er  $\sqrt{2}$ .



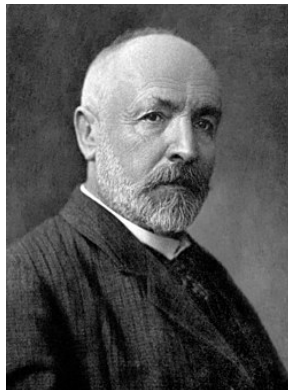
# En ikke kronologisk historie

- Fra Analyse 1 ved vi, at der er tælleligt mange rationale tal, men overtælleligt mange reelle tal.
- Et eksempel på et irrationalt tal er  $\sqrt{2}$ .
- Men det er også et specielt tal! Det er **algebraisk**.



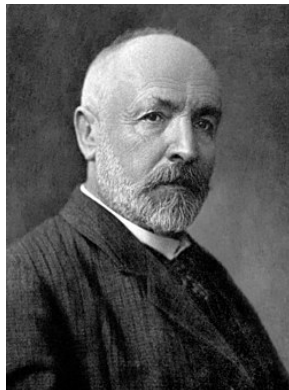
# En ikke kronologisk historie

- Fra Analyse 1 ved vi, at der er tælleligt mange rationale tal, men overtælleligt mange reelle tal.
- Et eksempel på et irrationalt tal er  $\sqrt{2}$ .
- Men det er også et specielt tal! Det er **algebraisk**.
- Disse er rødder polynomier med heltalskoefficienter.



# En ikke kronologisk historie

- Fra Analyse 1 ved vi, at der er tælleligt mange rationale tal, men overtælleligt mange reelle tal.
- Et eksempel på et irrationalt tal er  $\sqrt{2}$ .
- Men det er også et specielt tal! Det er **algebraisk**.
- Disse er rødder polynomier med heltalskoefficienter.
- Lad os lige på tavlen vise, at der ikke er forfærdeligt mange af dem.



# Fra eksistens til konstruktion?

- Bare fordi noget findes i rigt mål, betyder ikke at det er nemt at konstruere.

# Fra eksistens til konstruktion?

- Bare fordi noget findes i rigt mål, betyder ikke at det er nemt at konstruere.
- Et relateret eksempel er **normale tal**. Disse er tal, der har den forventede cifferfordeling til enhver base.

# Fra eksistens til konstruktion?

- Bare fordi noget findes i rigt mål, betyder ikke at det er nemt at konstruere.
- Et relateret eksempel er **normale tal**. Disse er tal, der har den forventede cifferfordeling til enhver base.
- Næsten alle tal mht. Lebesgue-målet har denne egenskab, men de er overordentligt svære at konstruere eksempler på.

# Liouville to the rescue

## Sætning

*Lad  $\alpha$  være algebraisk, irrationalt og af grad lad  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Så findes en konstant  $C(\alpha) > 0$  så at*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(\alpha)}{q^n}$$

*for alle rationale  $p/q$ .*



# Hvordan laver vi eksempler?

- Med Liouvilles Sætning i hånden kan vi lave eksempler på transcendente tal.

# Hvordan laver vi eksempler?

- Med Liouvilles Sætning i hånden kan vi lave eksempler på transcendentale tal.
- Vi skal bygge noget, der har usædvanligt gode rationale approksimanter, så uligheden fra før ikke kan holde.

# Hvordan laver vi eksempler?

- Med Liouvilles Sætning i hånden kan vi lave eksempler på transcendente tal.
- Vi skal bygge noget, der har usædvanligt gode rationale approksimanter, så uligheden fra før ikke kan holde.
- Det første eksempel i Liouvilles artikel er givet ved en kædebrøk. Det andet er

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}.$$

# Hvordan laver vi eksempler?

- Med Liouvilles Sætning i hånden kan vi lave eksempler på transcendente tal.
- Vi skal bygge noget, der har usædvanligt gode rationale approksimanter, så uligheden fra før ikke kan holde.
- Det første eksempel i Liouvilles artikel er givet ved en kædebrøk. Det andet er

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}.$$

- Den tager vi også lige på tavlen.

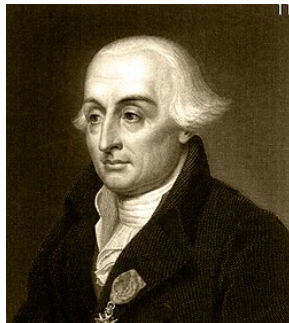
# Outline

- 1 De første eksempler
- 2 I Liouvilles fodspor
- 3 Kan det egentlig bruges til noget?
- 4 Konkrete tal

# Er det bedst muligt?

- Ethvert irrationalt tal har uendeligt mange approksimanter så at

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C(\alpha)}{q^2}.$$

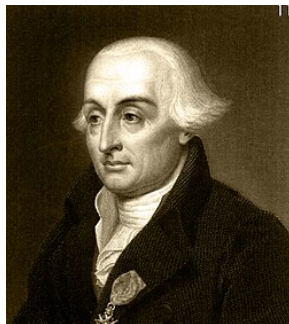


# Er det bedst muligt?

- Ethvert irrationalt tal har uendeligt mange approksimanter så at

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C(\alpha)}{q^2}.$$

- Lagrange viste, at dette er bedst muligt for grad 2.

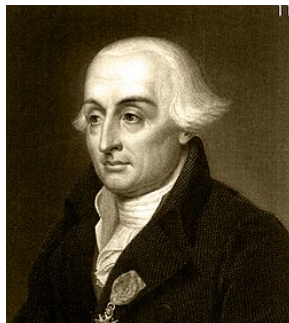


# Er det bedst muligt?

- Ethvert irrationalt tal har uendeligt mange approksimanter så at

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C(\alpha)}{q^2}.$$

- Lagrange viste, at dette er bedst muligt for grad 2.
- For højere grad er der stadig plads..



# Thues forbedring

## Sætning

Lad  $\alpha$  være algebraisk, irrationalt, og af grad  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Så findes en konstant  $C(\alpha) > 0$  så at

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(\alpha)}{q^{n/2+1}}$$

for alle rationale  $p/q$ .



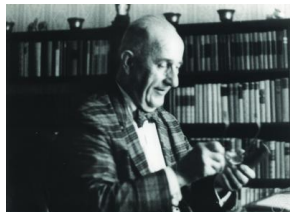
# Siegels forbedring

## Sætning

Lad  $\alpha$  være algebraisk, irrationalt, og af grad  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Så findes en konstant  $C(\alpha) > 0$  så at

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(\alpha)}{q^{2\sqrt{n}}}$$

for alle rationale  $p/q$ .



# Dysons forbedring

## Sætning

Lad  $\alpha$  være algebraisk, irrationalt, og af grad  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Så findes en konstant  $C(\alpha) > 0$  så at

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(\alpha)}{q^{\sqrt{2n}}}$$

for alle rationale  $p/q$ .



# Gelfonds forbedring

## Sætning

Lad  $\alpha$  være algebraisk, irrationalt, og af grad  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Så findes en konstant  $C(\alpha) > 0$  så at

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(\alpha)}{q^{\sqrt{2n}}}$$

for alle rationale  $p/q$ .



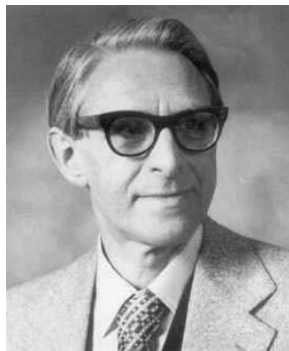
# Og Roth gør arbejdet færdigt!

## Sætning

Lad  $\alpha$  være algebraisk og irrationalt, og lad varepsilon  $> 0$ . Så findes en konstant  $C(\alpha, \varepsilon) > 0$  så at

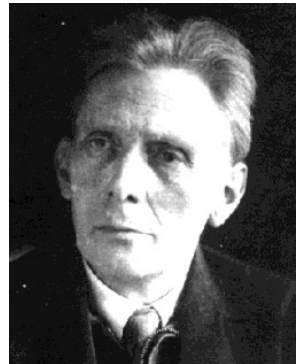
$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(\alpha, \varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}$$

for alle rationale  $p/q$ .



## Eller gjorde han?

- En almindelig måde at lave formodninger på er at gætte på, at tal opfører sig på den typiske måde, med mindre det ikke er.



# Eller gjorde han?

- En almindelig måde at lave formodninger på er at gætte på, at tal opfører sig på den typiske måde, med mindre det ikke er.
- Khintchine viste, at hvis  $\psi(q)$  aftager og  $\sum \psi(q) = \infty$ , så er der uendeligt mange løsninger til

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\psi(q)}{q}$$

for næsten alle tal og omvendt ved konvergens.



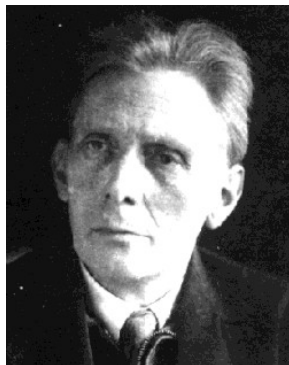
# Eller gjorde han?

- En almindelig måde at lave formodninger på er at gætte på, at tal opfører sig på den typiske måde, med mindre det ikke er.
- Khintchine viste, at hvis  $\psi(q)$  aftager og  $\sum \psi(q) = \infty$ , så er der uendeligt mange løsninger til

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\psi(q)}{q}$$

for næsten alle tal og omvendt ved konvergens.

- Der er rum for logaritmer! Men det er åbne problemer



# Outline

- 1 De første eksempler
- 2 I Liouvilles fodspor
- 3 Kan det egentlig bruges til noget?
- 4 Konkrete tal

# Diofantiske ligninger

- Thue var egentlig ligeglad med transcendens! Han ville gerne løse ligninger.

# Diofantiske ligninger

- Thue var egentlig ligeglad med transcendens! Han ville gerne løse ligninger.
- Mere præcist var han interesseret i ligninger på formen

$$F(x, y) = m,$$

hvor  $x, y$  skal findes i  $\mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  er fast og  $F$  er et **homogent, irreducibelt** polynomium med heltalskoefficienter.

# Diofantiske ligninger

- Thue var egentlig ligeglad med transcendens! Han ville gerne løse ligninger.
- Mere præcist var han interesseret i ligninger på formen

$$F(x, y) = m,$$

hvor  $x, y$  skal findes i  $\mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  er fast og  $F$  er et **homogent, irreducibelt** polynomium med heltalskoefficienter.

- Sådanne ligninger kaldes Thue-ligninger.

# Diofantiske ligninger

- Thue var egentlig ligeglad med transcendens! Han ville gerne løse ligninger.
- Mere præcist var han interesseret i ligninger på formen

$$F(x, y) = m,$$

hvor  $x, y$  skal findes i  $\mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  er fast og  $F$  er et **homogent, irreducibelt** polynomium med heltalskoefficienter.

- Sådanne ligninger kaldes Thue-ligninger.
- Han viste, at hvis graden er større end 2, så er der kun endeligt mange løsninger. Dette er bedst muligt.

# Diofantiske ligninger

- Thue var egentlig ligeglad med transcendens! Han ville gerne løse ligninger.
- Mere præcist var han interesseret i ligninger på formen

$$F(x, y) = m,$$

hvor  $x, y$  skal findes i  $\mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  er fast og  $F$  er et **homogent, irreducibelt** polynomium med heltalskoefficienter.

- Sådanne ligninger kaldes Thue-ligninger.
- Han viste, at hvis graden er større end 2, så er der kun endeligt mange løsninger. Dette er bedst muligt.
- Den tager vi lige på tavlen med udgangspunkt i Roth.

# Konkrete ligninger?

- Enhver løsning skal være en god approksimant til et algebraisk tal.

# Konkrete ligninger?

- Enhver løsning skal være en god approksimant til et algebraisk tal.
- Roth og venner siger, at der højst er endeligt mange af den slags, så vi skal jo bare finde dem.

# Konkrete ligninger?

- Enhver løsning skal være en god approksimant til et algebraisk tal.
- Roth og venner siger, at der højst er endeligt mange af den slags, så vi skal jo bare finde dem.
- Uheldigvis giver beviserne kun en grænse på antallet af approksimanter, og den er astronomisk!

# Konkrete ligninger?

- Enhver løsning skal være en god approksimant til et algebraisk tal.
- Roth og venner siger, at der højst er endeligt mange af den slags, så vi skal jo bare finde dem.
- Uheldigvis giver beviserne kun en grænse på antallet af approksimanter, og den er astronomisk!
- Faktiske Thue-ligninger har sjældent over 10 løsninger, så vi ved ikke, hvornår vi skal stoppe med at lede.

# Konkrete ligninger?

- Enhver løsning skal være en god approksimant til et algebraisk tal.
- Roth og venner siger, at der højst er endeligt mange af den slags, så vi skal jo bare finde dem.
- Uheldigvis giver beviserne kun en grænse på antallet af approksimanter, og den er astronomisk!
- Faktiske Thue-ligninger har sjældent over 10 løsninger, så vi ved ikke, hvornår vi skal stoppe med at lede.
- Det problem kan vi vende tilbage til.

# Outline

- 1 De første eksempler
- 2 I Liouvilles fodspor
- 3 Kan det egentlig bruges til noget?
- 4 Konkrete tal

# Hvorfor er vi ikke glade endnu?

- De tidligere resultater tillod os at konstruere transcendentet tal i større og større mål. Og vi kunne anvende det til resultater om algebraiske tal.

# Hvorfor er vi ikke glade endnu?

- De tidligere resultater tillod os at konstruere transcendentet tal i større og større mål. Og vi kunne anvende det til resultater om algebraiske tal.
- Men de er alle sammen lavet til formålet! Som regel er vi givet et tal først!

# Hvorfor er vi ikke glade endnu?

- De tidligere resultater tillod os at konstruere transcendent tal i større og større mål. Og vi kunne anvende det til resultater om algebraiske tal.
- Men de er alle sammen lavet til formålet! Som regel er vi givet et tal først!
- Og så bliver det rigtig svært! Som analogi ved ingen, om  $\pi$  er normalt.

# $e$ er transcendent!

Sætning (Hermite)

*Tallet  $e$  er et transcendent tal.*



# $\pi$ er transcendent!

Sætning (Lindemann)

*Tallet  $\pi$  er et transcendent tal.*



# Cirkelns kvadratur

- En af de klassiske udfordringer i konstruktion med passer og lineal er, givet en cirkel, at konstruere et kvadrat med samme areal.

# Cirklens kvadratur

- En af de klassiske udfordringer i konstruktion med passer og lineal er, givet en cirkel, at konstruere et kvadrat med samme areal.
- Har vi med en enhedscirkel at gøre, er udfordringen at konstruere et liniestykke med længde  $\sqrt{\pi}$ , give at vi kender længden 1.

# Cirkelns kvadratur

- En af de klassiske udfordringer i konstruktion med passer og lineal er, givet en cirkel, at konstruere et kvadrat med samme areal.
- Har vi med en enhedscirkel at gøre, er udfordringen at konstruere et liniestykke med længde  $\sqrt{\pi}$ , give at vi kender længden 1.
- Men vi kan kun lave kvadratiske udvidelser med passer og lineal, så da  $\pi$  er transcendent, kan det slet ikke lade sig gøre!

# Riemanns $\zeta$ -funktion

- Mange konkrete tal er givet ved værdier af funktioner.



# Riemanns $\zeta$ -funktion

- Mange konkrete tal er givet ved værdier af funktioner.
- Her er funktioner i familie med Riemanns  $\zeta$ -funktion nok de vigtigste,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1$$



# Riemanns $\zeta$ -funktion

- Mange konkrete tal er givet ved værdier af funktioner.
- Her er funktioner i familie med Riemanns  $\zeta$ -funktion nok de vigtigste,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1$$

- Den kan udvides til  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  og indeholder al information om fordelingen af primtal.



# De lige værdier

- Euler viste, at

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}.$$



# De lige værdier

- Euler viste, at

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}.$$

- Her er  $B_{2n}$ 'erne Bernoulli-tallene. De er rationale og kan findes som Taylor-koefficienterne for  $t/(e^t - 1)$ , udviklet omkring 0.



# De lige værdier

- Euler viste, at

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}.$$

- Her er  $B_{2n}$ 'erne Bernoulli-tallene. De er rationale og kan findes som Taylor-koefficienterne for  $t/(e^t - 1)$ , udviklet omkring 0.
- Da  $\pi$  er transcendent, er  $\pi^{2n}$  det også for alle  $n$ , så  $\zeta(2n)$  er transcendent.



# Hvad så med de ulige

- Ulige værdier er stadig et mysterium! Lad os starte med 1.



# Hvad så med de ulige

- Ulige værdier er stadig et mysterium! Lad os starte med 1.
- Riemanns  $\zeta$ -funktion er ikke defineret her, men det er Euler–Masceroni-konstanten,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log(N) \right).$$



# Hvad så med de ulige

- Ulige værdier er stadig et mysterium! Lad os starte med 1.
- Riemanns  $\zeta$ -funktion er ikke defineret her, men det er Euler–Masceroni-konstanten,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log(N) \right).$$

- Vi ved næsten intet om den! Ham på billedet lovede at opgive sit professorat i Oxford til fordel for den, der kunne vise, at den er irrational!



# Hvad så med de ulige

- Apery viste, at  $\zeta(3)$  ikke er rationalt.  
Det var der meget storm om!



# Hvad så med de ulige

- Apery viste, at  $\zeta(3)$  ikke er rationalt. Det var der meget storm om!
- Men vi ved til dato ikke, om det er et transcendent tal!



# Hvad så med de ulige

- Det bliver endnu mere pinligt for højere værdier af  $n$ !



# Hvad så med de ulige

- Det bliver endnu mere pinligt for højere værdier af  $n$ !
- Vi ved, at der er uendeligt mange irrationale iblandt, men intet om transcendens.



# Hvad så med de ulige

- Det bliver endnu mere pinligt for højere værdier af  $n$ !
- Vi ved, at der er uendeligt mange irrationale iblandt, men intet om transcendens.
- Det mest præcise resultat er nok Zudilins, der siger, at mindst et af  $\zeta(5)$ ,  $\zeta(7)$ ,  $\zeta(9)$  og  $\zeta(11)$  er irrationalt.



# Lineære former

- Lad os vende tilbage til de klassiske resultater. Lindemann og Weierstrass kiggede på

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n}$$



*Weierstrass*

# Lineære former

- Lad os vende tilbage til de klassiske resultater. Lindemann og Weierstrass kiggede på

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \dots + \beta_n e^{\alpha_n}$$

- De viste, at dette ikke er nul for  $\alpha_i$ 'erne forskellige algebraiske og  $\beta_i$ 'erne algebraiske og ikke nul.



*Weierstrass*

# Lineære former

- Lad os vende tilbage til de klassiske resultater. Lindemann og Weierstrass kiggede på

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n}$$

- De viste, at dette ikke er nul for  $\alpha_i$ 'erne forskellige algebraiske og  $\beta_i$ 'erne algebraiske og ikke nul.
- Det følger let at såvel  $e$ ,  $\pi$  og  $\log(n)$  er transcendent (på tavlen).



*Weierstrass*

# Mere beskidt undertøj

- Det følger imidlertid ikke, at  $\pi \cdot e$  og  $\pi + e$  er transcendent.

# Mere beskidt undertøj

- Det følger imidlertid ikke, at  $\pi \cdot e$  og  $\pi + e$  er transcendent.
- Det bedste, jeg kan klare, er, at mindst én af dem er!

# Mere beskidt undertøj

- Det følger imidlertid ikke, at  $\pi \cdot e$  og  $\pi + e$  er transcendent.
- Det bedste, jeg kan klare, er, at mindst én af dem er!
- Det er til gengæld nemt nok til tavlen!

# Hilberts syvende problem

- Hilbert lavede en liste over 23 problemer, der var åbne i 1900. Syv er stadig åbne.



# Hilberts syvende problem

- Hilbert lavede en liste over 23 problemer, der var åbne i 1900. Syv er stadig åbne.
- Det syvende problem var, om  $2^{\sqrt{2}}$  er transcendent. Han formodede, at det var sværere end Riemann-hypotesen.



# Hilberts syvende problem

- Hilbert lavede en liste over 23 problemer, der var åbne i 1900. Syv er stadig åbne.
- Det syvende problem var, om  $2^{\sqrt{2}}$  er transcendent. Han formodede, at det var sværere end Riemann-hypotesen.
- En anden formulering opnås ved at tage logaritmen: For alle algebraiske  $\alpha$  er

$$\sqrt{2} \log 2 + \log \alpha \neq 0$$



# Gelfond–Schneider

- Gelfond og Schneider løste det dog ved at vise, at  $\alpha^\beta$  er transcendent for  $\alpha$  algebraisk og  $\neq 0, 1$  og  $\beta$  algebraisk og irrationalt.



# Gelfond–Schneider

- Gelfond og Schneider løste det dog ved at vise, at  $\alpha^\beta$  er transcendent for  $\alpha$  algebraisk og  $\neq 0, 1$  og  $\beta$  algebraisk og irrationalt.
- Vi kan også tage logaritmer:

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0,$$

med mindre det oplagt er det.



# Gelfond–Schneider

- Gelfond og Schneider løste det dog ved at vise, at  $\alpha^\beta$  er transcendent for  $\alpha$  algebraisk og  $\neq 0, 1$  og  $\beta$  algebraisk og irrationalt.
- Vi kan også tage logaritmer:

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0,$$

med mindre det oplagt er det.

- Det er kun oplagt, når  $\log \alpha_1 = \frac{p}{q} \log \alpha_2$ .



# Bakers resultat

- Alan Baker fik en Fields-medalje for at vise, at

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0.$$



# Bakers resultat

- Alan Baker fik en Fields-medalje for at vise, at

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0.$$

- Faktisk viste han endda, at

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0.$$



# Bakers resultat

- Alan Baker fik en Fields-medalje for at vise, at

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0.$$

- Faktisk viste han endda, at

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0.$$

- Og tilmed at

$$|\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n| > H^{-C},$$

hvor alt kan regnes ud!



# Tilbage til Thue-ligninger

- Bakers resultat kan bruges til at løse Thue-ligninger (på tavlen).

# Tilbage til Thue-ligninger

- Bakers resultat kan bruges til at løse Thue-ligninger (på tavlen).
- Med lidt arbejde kan den effektive grænse omsættes til en grænse på løsningernes absolutværdi!

# Tilbage til Thue-ligninger

- Bakers resultat kan bruges til at løse Thue-ligninger (på tavlen).
- Med lidt arbejde kan den effektive grænse omsættes til en grænse på løsningernes absolutværdi!
- Og så ved vi, hvornår vi skal stoppe med at lede!

# Tilbage til Thue-ligninger

- Bakers resultat kan bruges til at løse Thue-ligninger (på tavlen).
- Med lidt arbejde kan den effektive grænse omsættes til en grænse på løsningernes absolutværdi!
- Og så ved vi, hvornår vi skal stoppe med at lede!
- Universet er nok gået under, inden vi er færdige, så der skal mere til, men alligevel. . .

# Tak fordi I kom!