Verdenen er styret af Cayley-Dickson

Andrew Swann
swann@math.au.dk

Institut for Matematik
Aarhus Universitet

Eulers Venner
6. maj, 2025

Ide

Cayley-Dickson proces: talsystem $A \longrightarrow$ talsystem B
f.eks. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Fysik: talsystemerne og deres symmetrier ligger bagved forskellige fysiske teorier, med tilknyttede

Geometriske strukturer.

$$2 + 2 = 4$$

$$1 + 1 = 2$$

Cayley-Dickson 1

Vi konstruerer $\mathbb{C}$ fra $\mathbb{R}$ ved at tilføje „$i = \sqrt{-1}$“:

$z \in \mathbb{C}$ er givet ved $z = a + ib$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$, med regneregler

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$
$$zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Dvs. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, som vektorrum over $\mathbb{R}$, og med multiplikation

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Egenskaber af $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, multiplikation $(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: $\quad \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{0\} = \{\,(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\,\}$.
- $i = (0,1)$ opfylder $\quad i^2 = (-1,0) = -1$.
- konjugeringsoperation $\overline{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\overline{(a,b)} = (a,-b).$$

- norm $\|\cdot\| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

$$\|(a,b)\|^2 = a^2 + b^2 = z\overline{z}, \qquad \text{hvor } z = (a,b).$$

- $\|zw\| = \|z\|\|w\|$.
- for $z \neq 0$, har z multiplikativ invers $\quad z^{-1} = \dfrac{1}{\|z\|^2}\overline{z}$.

$\mathbb{C}$ er så en *reel normerede divisionsalgebra*.

Ydeligere egenskaber af $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

$\mathbb{C}$ er

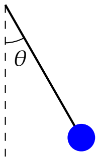
$$\begin{aligned} \text{kommutativ} \quad & zw = wz, && \text{for alle } z, w \in \mathbb{C}, \text{ og} \\ \text{associativ} \quad & u(zw) = (uz)w, && \text{for alle } u, z, w \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1 \,\} &= \{\, e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \mathrm{U}(1) \cong \mathrm{SO}(2), \qquad a + ib \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right), \end{aligned}$$

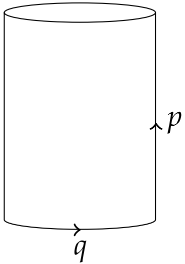
er en gruppe, rotationsgruppen i $\mathbb{R}^2$.

Partikelbevægelse

Pendul, vægt på en stang:



Faserum, koordinater $q = \theta, p = \dot{\theta}$:



Enhver (orienterede) flade tillader en kompleks struktur.

Elektromagnetisme

Maxwells ligninger

$$\nabla \cdot E = \rho, \qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t},$$
$$\nabla \cdot B = 0, \qquad \nabla \times B = J + \frac{\partial E}{\partial t},$$

$E(x_1, x_2, x_3, t), B(x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3$ elektriske og magnetiske felter

ρ elektrisk ladningstæthed, J strømtæthed, i enheder med $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2 = 1$.

$$\nabla \cdot E = \operatorname{div} E = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3},$$

$$\nabla \times E = \operatorname{curl} E = \operatorname{rot} E = \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}, \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}, \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right).$$

Elektromagnetisme 2

En gemt symmetri:

$$\nabla \cdot B = 0 \implies B = \nabla \times a,$$

og så

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial a}{\partial t} \implies E = \nabla v - \frac{\partial a}{\partial t}.$$

(v, a) er lokalt definerede og ikke entydigt bestemte: de kan ændres via en „gauge transformation“

$$v \mapsto v + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad a \mapsto a + \nabla f,$$

for en vilkårlig funktion $f(x, t)$.

Sæt $\alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + v\,dt$, så er

$$F = d\alpha = \mathcal{B} + \mathcal{E} \wedge dt,$$

hvor $\mathcal{E} = \sum_{p=1}^{3} E_p dx_p$, $\mathcal{B} = \sum_{p=1}^{3} B_p * dx_p$.

Maxwells ligninger er nu

$$dF = 0, \qquad d^*F = \mathcal{J}.$$

F er „krumningen“ af en U(1) „konnektion“.

Symmetrierne er givet ved „$g(x,t) = \exp(if)$“, som er en U(1) symmetri i hvert punkt i rumtid.
α ændres via $-i\,dg\,g^{-1} = df$.

$$2 + 2 = 4$$

Cayley-Dickson 2

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, multiplikation $(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Definér nu de kvarterniontal $\mathbb{H}$ ved

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

som vektorrum over $\mathbb{R}$, med multiplikation

$$(a,b)(c,d) = (ac - b\overline{d}, ad + b\overline{c}),$$

for $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Egenskaber af $\mathbb{H}$

$\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, multiplikation $(a,b)(c,d) = (ac - b\overline{d}, ad + b\overline{c})$.

- $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$: $\quad \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \{0\} = \{\,(a,0) \mid a \in \mathbb{C}\,\}$.
- $j = (0,1)$ opfylder $\quad j^2 = (-1,0) = -1$.
- konjugeringsoperation $\overline{\cdot} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$

$$\overline{(a,b)} = (\overline{a}, -b).$$

- norm $\|\cdot\| : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

$$\|(a,b)\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = q\overline{q}, \qquad \text{hvor } q = (a,b).$$

- $\|qp\| = \|q\|\|p\|$.
- for $q \neq 0$, har q multiplikativ invers $\quad q^{-1} = \dfrac{1}{\|q\|^2}\overline{q}$.

$\mathbb{H}$ er så en *reel normerede divisionsalgebra.*

Ydeligere egenskaber af $\mathbb{H}$

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad (a,b)(c,d) = (ac - b\overline{d}, ad + b\overline{c}).$$

$\mathbb{H}$ er

associativ $p(qr) = (pq)r, \qquad$ for alle $p, q, r \in \mathbb{H}$,

men er ikke kommutativ: generelt $pq \neq qp$, f.eks.

$$\begin{aligned} ij &= (i,0)(0,1) = (0,i) =: k, \\ ji &= (0,1)(i,0) = (0,-i) = -k. \end{aligned}$$

Vi har også $k^2 = -1$.

$$1 + 3 = 4$$

$1 + 3 = 4$

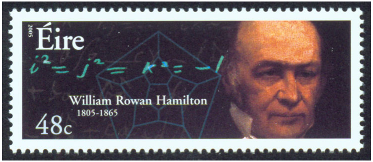
Som vektorrum over $\mathbb{R}$ har $\mathbb{H}$ basis $1, i, j, k$.

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\cong \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ &= \mathbb{R}1 + \operatorname{span}\{i, j, k\} = \mathbb{R} + \operatorname{Im}\mathbb{H} \end{aligned}$$

$$q = t + \mathbf{u}, \qquad t \in \mathbb{R},\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 = \operatorname{Im}\mathbb{H}$$

i, j, k er standard basisvektorer i $\mathbb{R}^3$, skrives ofte $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, især i rumgeometri og mekanik. $\quad 1 + 3 = \text{tid} + \text{rum}$.

Kvarterniontal blev indført af



William Rowan Hamilton

Kvaternionmultiplikation siger

$$\mathbf{uv} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

for $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 = \operatorname{Im}\mathbb{H}$. Så

$$\mathbf{u}^2 = -1$$

når $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 = \operatorname{Im}\mathbb{H}$.

Symmetrier af $\mathbb{H}$ — 1

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad (a,b)(c,d) = (ac - b\overline{d}, ad + b\overline{c}).$$

$$\begin{aligned} S^3 = \{\, q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1 \,\} \\ = \mathrm{Sp}(1) \cong \mathrm{SU}(2) \\ = \{\, A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \overline{A}^T A = 1,\ \det A = 1 \,\}, \end{aligned}$$

$$a + jb \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix},$$

er en gruppe.

Afbildningen fra Sp(1)

$$q \mapsto R_q, \qquad R_q(\mathbf{u}) = q\mathbf{u}\overline{q}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Im}\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$$

har billedet rotationsgruppen i dimension 3:

$$\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{Sp}(1)/\{\pm 1\} \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\}.$$

Symmetrier af $\mathbb{H}$ — 2

Afbildningen fra $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$

$$(p, q) \mapsto S_{p,q}, \qquad S_{p,q} w = p w \overline{q}, \quad w \in \mathbb{H} = \mathbb{R}^4,$$

har billedet rotationsgruppen i dimension 4:

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(4) &\cong (\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)) / \{\pm(1,1)\} \\ &\cong (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)) / \{\pm(1,1)\}. \end{aligned}$$

To konsekvenser:

1. Alle (orienterede) rum af dimension 4 tillader en (svag) kvarternionstruktur på deres tangent rum — men i, j, k blandes fra punkt til punkt.
2. Gruppen $\mathrm{SO}(4)$ er ikke simpel — den har normale undergrupper $\mathrm{Sp}(1)_+ = \{ S_{p,1} \mid p \in \mathrm{Sp}(1) \}$ og $\mathrm{Sp}(1)_- = \{ S_{1,q} \mid q \in \mathrm{Sp}(1) \}$ af positiv dimension.

Selv-dualitet

$\mathrm{SO}(4) \cong (\mathrm{Sp}(1)_+ \times \mathrm{Sp}(1)_-)/\{\pm(1,1)\}$ afspejles i at krumninger på (orienterede) rum M^4 af dimension 4 kan deles

$$F = F_+ + F_-, \qquad F_\pm = \tfrac{1}{2}(F \pm *F).$$

Yang-Mills ligninger

$$dF = 0 \quad d^*F = \mathcal{J}, \qquad\qquad d^*F = -*d*F,$$

med gauge gruppe G, f.eks. $G = \mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SU}(2)$. Bruges i beskrivelse af den svage kernekraft.

Blandt løsninger på M^4 for $\mathcal{J} = 0$ er alle F der opfylder $F = F_+$ eller $F = F_-$. Disse kaldes „instantoner“. Ved at tælle antallet af instantoner (eller dimension af rummet af instantoner) får man en invariant af M^4. Instantonligningen $F_- = 0$ er en differentialligning over M og det viser sig at disse invarianter kan skelne mellem forskellige differentiable strukturer.

Glatte strukturer på $\mathbb{R}^4$

Sætning (Taubes, 1987; Donaldson + Friedman, 1983)

$\mathbb{R}^4$ *med dens sædvanlige topologi („kontinuitetsbegreb")* tillader $\mathbb{R}^4$ *uendelige mange forskellige differentiable strukturer.*

Til gengæld for $n \neq 4$ har $\mathbb{R}^n$ en entydig differentiabel struktur.

Einstein metrikker

For krumning R af en Riemannsk metrik g, i dimension 4, er den gravitationelle instantonligningen

$$R_- = 0,$$

som medfører at metrikken er „hyperKähler": den tillader veldefineret I, J, K på tangentrummene, opfyldende de kvarternionidentiteter

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \quad IJ = K = -JI,$$

kompatibel med metrikken og parallelle.

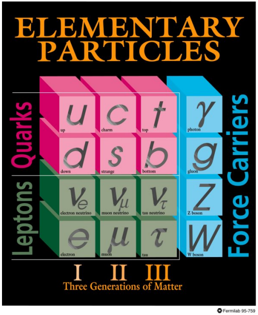
Alle hyperKähler metrikker opfylder Einsteins ligninger (cf. relativitetsteori)

$$\mathrm{Ric} = \lambda g$$

med kosmologisk konstant $\lambda = 0$.

Geometrien har „holonomi $\mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SU}(2)$". Modelleret på $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ med symmetrigruppen $\mathrm{Sp}(1)_+$.

Standard modellen



Elektromagnetisme	U(1) = SO(2)
Svag kernekræft	Sp(1) = SU(2)
Stærk kernekræft	SU(3)

Gruppeteorien bestemmer hvilke type partikler der kan være og hvordan kræfterne påvirker dem.

Bemærk tyngdekræften er ikke med.

$$4 + 4 = 8$$

Cayley-Dickson 3

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{C} &= \mathbb{R} \times \mathbb{R}\\ \mathbb{H} &= \mathbb{C} \times \mathbb{C}\end{aligned}\right\} \quad (a,b)(c,d) = (ac - b\overline{d}, ad + b\overline{c}).$$

Vi indfører oktoniontal eller Cayleys tal $\mathbb{O}$ ved

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H},$$

som vektorrum over $\mathbb{R}$, med multiplikation

$$(a,b)(c,d) = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c}),$$

for $a, b, c, d \in \mathbb{H}$.

Egenskaber af $\mathbb{O}$

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}, \quad (a,b)(c,d) = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c}).$$

- $\mathbb{H} \subset \mathbb{O}$: $\quad \mathbb{H} \cong \mathbb{H} \times \{0\} = \{\, (a,0) \mid a \in \mathbb{H} \,\}.$
- $e = (0,1)$ opfylder $\quad e^2 = (-1,0) = -1.$
- konjugeringsoperation $\overline{\cdot} : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$

$$\overline{(a,b)} = (\overline{a}, -b).$$

- norm $\|\cdot\| : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

$$\|(a,b)\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = u\overline{u}, \qquad \text{hvor } u = (a,b).$$

- $\|uv\| = \|u\|\|v\|.$
- for $u \neq 0$, har u multiplikativ invers $\quad u^{-1} = \dfrac{1}{\|u\|^2}\overline{u}.$

$\mathbb{O}$ er så en *reel normerede divisionsalgebra*.

Ydeligere egenskaber af $\mathbb{O}$

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}, \quad (a,b)(c,d) = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c}).$$

$\mathbb{O}$ er ikke associativ: generelt $u(vw) \neq (uv)w$, f.eks.

$$\begin{aligned} i(ej) &= (i,0)\big((0,1)(0,j)\big) = (i,0)(j,0) = (ij,0) = (k,0), \\ (ie)j &= \big((i,0)(0,1)\big)(0,j) = (0,i)(0,j) = (ji,0) = (-k,0). \end{aligned}$$

Konsekvens,

$$S^7 = \{\, u \in \mathbb{O} \mid \|u\| = 1 \,\}$$

er ikke en gruppe. Men

$$\{\, A \in M_8(\mathbb{R}) \mid A \text{ invertibel}, \ (Au)(Av) = A(uv) \,\}$$

er en gruppe, som kaldes G_2.
G_2 er en undergruppe af SO(7), rotationsgruppen for $\mathbb{R}^7 = \operatorname{Im}\mathbb{O}$.

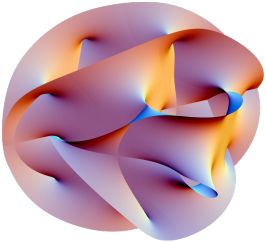
$$2 + 2 + 2 = 6 = 3 + 3$$

Calabi-Yau geometri

$$\begin{aligned}\{\, v \in \operatorname{Im}\mathbb{O} \mid \operatorname{Re}(ve) = 0 \,\} &= \mathbb{C}^3\\ &= \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}\\ &= \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\, A \in G_2 \mid Ae = e \,\} &\cong \mathrm{SU}(3)\\ &= \{\, B \in M_3(\mathbb{C}) \mid \overline{B}^T B = 1,\ \det B = 1 \,\}.\end{aligned}$$

I dimension 6, er en „Calabi-Yau mangfoldighed“ modelleret på $(\mathbb{C}^3, \mathrm{SU}(3))$. Disse har en metrik der opfylder Einsteins ligninger med kosmologisk konstant $\lambda = 0$.



Streng teori og M-teori

Streng teori modellerer partikler som strenge, der bevæger sig i en rumtid af dimension $4 + 6 = 10$; det er et forsøg at forene standardmodellen og gravitationsteorien. Fundamentale eksempler har Calabi-Yau geometri i de 6 dimensioner.

Der er dog 5 forskellige streng teorier.

M-teori har rumtid af dimension $4 + 7 = 11$. Fundamental eksempler har de 7 dimension modelleret på $(\operatorname{Im}\mathbb{O}, G_2)$, og igen er Einstein med $\lambda = 0$, en „G_2 geometri". De første kompakte eksempler af rum med holonomi G_2 blev konstrueret i 1995 af Dominic Joyce (Oxford).

Supersymmetri har påstand, som f.eks. enhver hyperKähler geometri i dimension 4 giver G_2 geometrier i dimension 7.

$$8 + 8 = ?$$

Hurwitz sætning

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{C} &= \mathbb{R}\times\mathbb{R}\\ \mathbb{H} &= \mathbb{C}\times\mathbb{C}\\ \mathbb{O} &= \mathbb{H}\times\mathbb{H}\end{aligned}\right\}\quad (a,b)(c,d) = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c}).$$

Sætning (Hurwitz, 1898)

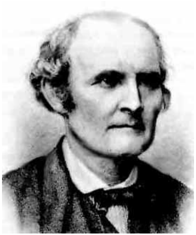
Enhver reel normerede divisionsalgebra $(A, mult, \|\cdot\|, 1)$ *er isomorf med enten* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ *eller* $\mathbb{O}$.

Bruges Cayley-Dickson på $\mathbb{O}\times\mathbb{O}$ fås nuldivisorer, så generelle elementer har ingen inverse.

Persongalleri

John Thomas Graves, 1806–1870, Irland
konstruerede de oktonion tal.

Arthur Cayley, 1821–1895, England.



Leonard Eugene Dickson, 1874–1954, USA.

Adolf Hurwitz, 1859–1919, Tyskland.